Aplicação do método de Eliminação de GAUSS em Matlab

Felipe Nunes[1] felipenl12@gmail.com

Yuri Franklin[2] yuri.fr@uol.com.br

Lúcio Cardoso[3] duducardosl@hotmail.com

1 Associação Educacional Dom Bosco (AEDB), Faculdade de Engenharia de Resende - Resende, RJ, Brasil

2 Associação Educacional Dom Bosco (AEDB), Faculdade de Engenharia de Resende - Resende, RJ, Brasil

3 Associação Educacional Dom Bosco (AEDB), Faculdade de Engenharia de Resende - Resende, RJ, Brasil

Resumo

Neste trabalho apresentaremos o método de Eliminação de Gauss que consiste transformar o sistema linear original num sistema linear equivalente, com matriz dos coeficientes triangular superior de resolução imediata, ou seja, Ax=b num outro A'x=b', e para isso se utilizando uma estratégia de pivoteamento minimizando assim possíveis erros de arredondamento. Para transformar esse sistema inicial em um equivalente mais simplificado uma seqüência de passos elementares que se traduz em: troca da ordem das equações; multiplicação de ambos os membros de qualquer das equações por uma constante não-nula; e adição de um múltiplo de uma das equações a uma outra equação do sistema, será mostrada, finalizando o trabalho com um exemplo resolvido para melhor visualização. Vale ressaltar que este método foi implementado em *Matlab.*

Palavras-chave: Eliminação de Gauss, Sistemas lineares, Matlab.

Introdução

Eliminação de Gauss é um método muito utilizado para resolver sistemas lineares, transformando o sistema original em um equivalente simplificado de mesma solução. Para esta modificação aplica-se sobre as equações do sistema Ax=b uma seqüência de operações elementares escolhidas entre:

i) trocar duas equações;
ii) multiplicar uma equação por uma constante não-nula;
iii) adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Objetivo

- Aprender um novo método para resolução de Sistemas Lineares;
- Implementar um programa do método de eliminação Gauss em Matlab.

Desenvolvimento

Seja Ax=b um sistema linear, em que A é uma matriz quadrada n x n.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(1)

O método consiste em eliminar todos elementos a_{ij}, i>j modificando sistemas lineares de forma a obter um sistema equivalente com uma matriz triangular superior, pois este é mais simples e de fácil resolução, ou seja, dada através de substituições.

Então este é o procedimento para casos de n equações lineares simultâneas em n variáveis.

Passos

Admitimos que as equações tenham sido ordenadas de modo que $a_{kk} \neq 0$ e definindo-se n-1 multiplicadores, teremos:

Eliminação

$$\left[\begin{array}{l} Para\ k = 1,\ldots,n-1 \\ \left[\begin{array}{l} Para\ i = k+1,\ldots,n \\ m = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ a_{ik} = 0 \\ Para\ \ j = k+1,\ldots,n \\ a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj} \\ b_i = b_i - m b_k \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Após eliminarmos x_{n-1} da última equação, o sistema triangular final é dado por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(2)

A substituição regressiva então produz a solução como se segue:

Resolução do sistema

$$\left[\begin{array}{l} x_n = b_n / a_{nn} \\ \left[\begin{array}{l} Para\ k = (n-1),\ldots,n \\ s = 0 \\ Para\ \ j = (k+1),\ldots,n \\ s = s + a_{kj} x_j \\ x_k = (b_k - s) / a_{kk} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

O algoritmo acima efetua, na fase de eliminação, $(4n^3+3n^2-7n)/6$ operações e, para resolver o sistema triangular superior será efetuadas n^2 operações, tendo assim um total de $(4n^3+9n^2-7n)/6$, para se resolver um sistema linear pelo método de Eliminação de Gauss.

Estratégias de pivoteamento

Para não se ter pivô nulo o que tornaria o trabalho impossível, e para se evitar trabalhar com pivô próximo de zero o que pode conduzir a resultados totalmente imprecisos, devemos contornar esses problemas utilizando uma estratégia de pivoteamento, ou seja, adotar um processo de escolha da linha e/ou coluna pivotal.

Estratégia de pivoteamento parcial

Esta estratégia consiste em:

i) no início da etapa k da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes.

$$a_{ik}^{(k-1)}, i = k, k+1, \cdots, n$$

(3)

ii) trocar as linhas k e i se for necessário.

Estratégia de pivoteamento completo

Nesta estratégia, no início da etapa k é escolhido para pivô o elemento de maior módulo, entre todos os elementos que atuam no processo de eliminação:

$$\begin{array}{l} máx\left|a_{ij}^{(k-1)}\right| = \left|a_{rs}^{(k-1)}\right| \Rightarrow pivô = a_{rs}^{(k-1)} \\ \forall i, j \geq k \end{array}$$

(4)

Fatoração de Matrizes (Método LU)

Os fatores LU podem ser construídos usando a idéia básica do método de eliminação de Gauss, pois a obtenção desses fatores por fórmulas dificulta o uso de estratégia de pivoteamento.

Fatorando a matriz A em duas matrizes triangulares L e U, sendo que o fator L é triangular inferior com diagonal unitária e seus elementos l_{ij} para i > j são os multiplicadores m_{ij} obtidos no processo de eliminação de Gauss; o fator U é triangular superior e é obtida no final da faze da triangularização.

$$A = LU = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{n\,n-1} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}}_{U}$$

(5)

No caso de aplicação da estratégia de pivoteamento parcial à fatoração LU será necessário a permutação de linhas na matriz A, obtendo-se:

$$LUx = Pb \quad (6)$$

<u>Algoritmo para programação em Matlab</u>

1º passo **-** Dados iniciais

A: Entrar com valores da matriz A;
b: Entrar com valores da matriz b.
Condição para a execução do programa
det(A)==0: A matiz A deve ter determinante diferente de ZERO, garantindo que a solução seja possível e determinada, se igual não realizar operação.

2º passo **-** Verificação

[y,p]=max(abs(Ab(k:n,k))): Acha o índice da linha com maior valor
absoluto na coluna para baixo.
A1([k p],:)=A1([p k],:); % Realiza a troca de linhas

3º passo **–** Aplicação do algoritmo

i=k+1:n;
m=A1(i,k)/A1(k,k): Multiplicador
j=k:n+1;
A1(i,j)=A1(i,j)-m*A1(k,j): Algoritmo

4º passo **-** Decomposição da matriz (voltando a ser um sistema mais simples).

A=A1(:,1:n);
b=A1(:,n+1);

5º passo **-** Resolução do sistema

x(n)= b(n)/A(n,n);
s=s+A(k,j)*x(j);
x(k)=(b(k)-s)/A(k,k): Substituição regressiva

disp ('O vetor solução e :')

Exemplo resolvido

Seja o sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Primeiramente vamos formar uma matriz utilizando a matriz dos coeficientes juntamente com o vetor dos termos independentes formando assim uma "matriz aumentada":

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Agora realizaremos passos para se zerar elementos obtendo uma matriz triangular superior:

1º passo – Utilizando o algoritmo $a_{2j} = a_{2j} - m_{21}a_{1j}$ sendo $m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, teremos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7/2 & 1/2 & -5 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

2º passo – Utilizando o algoritmo $a_{3j} = a_{3j} - m_{31}a_{1j}$ sendo $m_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}}$, teremos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7/2 & 1/2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

3º passo – Utilizando o algoritmo $a_{3j} = a_{3j} - m_{31}a_{1j}$ sendo $m_{32} = \dfrac{a_{32}}{a_{12}}$, teremos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7/2 & 1/2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Com essa matriz fica fácil resolver o sistema, através de substituições regressivas:

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
-7/2x_2 + 1/2x_3 = -5 \\
-x_3 = 3
\end{cases}
$$

Então teremos:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}
$$

Conclusão

Foi apresentado neste trabalho o método de eliminação de Gauss, sendo o mesmo implementado em Matlab, tornando-se a resolução de sistemas lineares de resolução mais simples, uma vez que, através do método pode-se transformar qualquer matriz em uma matriz triangular superior se utilizando de estratégias de pivoteamento não tendo assim pivor nulo o que tornaria impossível sua resolução obtendo um sistema equivalente de resolução imediata, através de regressões sucessivas.

Vale ainda considerar algumas considerações importantes:

O programa desenvolvido possui uma condição de uso (determinante diferente de zero) realizando assim somente operações possíveis e determinadas.

Quanto ao seu pivoteamento é progressivo escolhendo linhas de máximo valor absoluto da coluna desejada para baixo.

Referências

✓ SANTOS, Vitoriano Ruas de Barros. **Curso de Cálculo Numérico.** Rio de Janeiro: LTC, 1977.

✓ RUGGIERO, Márcia A. Gomes., LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico:** aspectos teóricos e computacionais. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1996.

✓ DORN, William S.; MCCRACKEN, Daniel D. , **Cálculo Numérico com estudo de casos em Fortran IV.** Rio de Janeiro: Editora Campus LTDA, Editora da Universidade de São Paulo, 1978

✓ SOUZA, MJF, Dep. de comp., UFOP, http://www.decom.ufop.br/prof/marcone.
Acessado em: 08/08/2006